

# SIMULADOR DE TRAYECTORIAS DE TRES GRADOS DE LIBERTAD PARA VEHÍCULOS ESPACIALES AXISIMÉTRICOS<sup>1\*</sup>

*Three-degree-of-freedom trajectory simulator for axisymmetric spacecraft*

Ing. Aníbal Vettorel<sup>2</sup>, Ing. Carlos Mario Carbone<sup>3</sup>, Ing. Agustín Tristant<sup>4</sup>

Grupo de Tecnología Aeroespacial (GTA), Grupo UTN de Investigación en Tecnología Aeroespacial.

Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Haedo, Buenos Aires, Argentina. gta@frh.utn.edu.ar

<sup>2</sup>avettorel@frh.utn.edu.ar <sup>3</sup>ccarbonel688@alumnos.frh.utn.edu.ar <sup>4</sup>atrissant676@alumnos.frh.utn.edu.ar

**Palabras clave:** Vehículos lanzadores, 3 DoF, Simulador de vuelo.

**Key words:** Launcher vehicles, 3 DoF, Flight simulator

## RESUMEN

En este trabajo se presenta un simulador de vuelo de 3 grados de libertad como primera etapa de desarrollo de un futuro simulador de 6 grados de libertad, para ser utilizado dentro del proyecto marco del Grupo de Tecnología Aeroespacial (GTA): "Diseño y optimización de un Lanzador Orbital Universitario para satélites tipo Cubesat". El lenguaje elegido para su implementación es Matlab® y aplica para vehículos con propiedades másicas y propulsivas variables en el tiempo, desplazándose tanto en vuelos atmosféricos como en trayectorias orbitales. Se utiliza el modelo de Tierra elíptica basado en el elipsoide de referencia WGS 84, tomando como marco de referencia inercial un sistema geocéntrico alineado con el plano de la eclíptica, con el eje x en dirección al punto vernal (sistema J2000).

## ABSTRACT

*This work presents a flight simulator with 3 degrees of freedom as the first stage of development of a future simulator with 6 degrees of freedom, to be used within the framework project of the Aerospace Technology Group (GTA, Spanish acronym): "Design and optimization of a University Orbital Launcher for Cubesat satellites". The language chosen for its implementation is Matlab® and applies to vehicles with time-varying mass and propulsive properties, moving both in atmospheric flight and in orbital trajectories. The elliptical Earth model based on the WGS 84 reference ellipsoid is used, taking as inertial reference frame a geocentric system aligned with the ecliptic plane, with the x-axis in the direction of the vernal point (J2000 system).*

## 1. INTRODUCCIÓN

El ascenso de un cohete es fundamentalmente diferente del ascenso acelerado del avión, principalmente debido a la disminución más rápida de la masa del primero y a un empuje casi constante con la altitud. Por estas razones, un cohete puede entregar una carga útil a una trayectoria orbital en una fracción del tiempo que necesita un avión para alcanzar su altitud de crucero. El ascenso más simple es la trayectoria vertical de un cohete sonda, que se emplea comúnmente en las observaciones meteorológicas de los estratos atmosféricos superiores, y para el cual se lleva a cabo fácilmente una solución de forma cerrada. Sin embargo, el ascenso curvo de un vehículo de lanzamiento de una nave espacial, desde  $\varphi = 90^\circ$  hasta  $\varphi \approx 0$ , es mucho más interesante desde el punto de vista del modelado. Es importante tener en cuenta que una ligera acumulación del factor de carga normal haría que la estructura delgada –similar a un caparazón– del vehículo de lanzamiento (a menudo casi completamente lleno de propulsores líquidos) colapse. Por lo tanto, dado que maniobrar está completamente descartado durante el

1. Trabajo presentado en el XII Congreso Argentino de Tecnología Espacial en abril de 2023.

\*. AGRADECIMIENTOS: Los autores del trabajo objeto de esta publicación desean expresar su gratitud a todos los integrantes del Grupo de Tecnología Aeroespacial (GTA), por su apoyo constante y decidido en pro de la ciencia y la investigación, facilitando instalaciones y equipos para actividades de fabricación, integración y ensayos. También extienden sus agradecimientos en especial a Alexis Maximiliano Caratuzzolo y Tomás Martín Ziroldo, integrantes del GTA, por sus contribuciones en la implementación de una base de datos de lanzadores modelos, a Pablo M. González, docente investigador del GTA por su apoyo.

lanzamiento, es natural preguntarse qué hace que el vehículo de lanzamiento cambie su trayectoria de vuelo de vertical a casi horizontal. La respuesta está en los efectos combinados de la gravedad y la rotación planetaria. A esta tendencia natural de la trayectoria a curvarse desde la superficie del planeta hasta la órbita, se denomina giro gravitatorio (*gravity turn*).

Un sistema de control de actitud es una característica indispensable del vehículo de lanzamiento, que siempre mantiene un ángulo de ataque cero a pesar de las pequeñas perturbaciones atmosféricas. El control de actitud de un cohete se lleva a cabo a través de vectores de empuje, mediante un mecanismo de retroalimentación basado en giroscopios y una ley de control que mantiene el vehículo en su equilibrio intrínsecamente inestable de circuito abierto. Además del control de actitud, se requiere un sistema de guía para mantener un vuelo casi vertical en los primeros segundos después del lanzamiento, durante los cuales se despeja la torre de lanzamiento y la trayectoria es inestable debido a una velocidad de vuelo cercana a cero. El giro por gravedad se inicia interrumpiendo el sistema de guiado automático tan pronto como el vehículo haya acelerado lo suficientemente para que  $|\varphi|$  se haga pequeño. Sin embargo, el control de actitud siempre está realizando su tarea de mantener cero ángulos de ataque y deslizamiento lateral durante todo el lanzamiento.

## 2. METODOLOGÍA

Para la simulación de vuelos atmosféricos o con trayectorias orbitales con rápidas variaciones de su masa, como los desarrollados por vehículos lanzadores y satélites, es necesario considerar una serie de hipótesis especiales en cuanto a la elección del marco de referencia utilizado y a la modelación de las fuerzas gravitacionales.

Durante un vuelo orbital, la geometría terrestre no puede asumirse como esférica, ya que el efecto del achatamiento en los polos de esta introduce componentes de fuerzas gravitacionales en dirección transversal, que afectan principalmente las trayectorias orbitales. Por otro lado, la rotación terrestre no permite asumir como marco de referencia inercial a un sistema fijo a la Tierra y deben utilizarse sistemas alineados con otras referencias astronómicas. Por tal motivo, las ecuaciones de movimiento elegidas se refieren a un sistema inercial alineado con la eclíptica de la Tierra (marco J2000), y para el cálculo del campo gravitacional se considera una geometría terrestre elíptica (elipsoide WGS 84).

En cuanto a la modelación del vehículo, hay que tener en cuenta que, para etapas de análisis preliminares, un modelo donde solo se consideran los grados de libertad traslacionales puede resultar suficiente. La próxima etapa de este desarrollo permitirá conocer la *performance* del vehículo durante el vuelo con mayor precisión al incluir los movimientos rotacionales en las ecuaciones de movimiento, obteniendo de este modo un modelo más complejo de seis grados de libertad.

La integración de las ecuaciones de movimiento se realiza mediante un esquema de Runge-Kutta de cuarto orden, utilizando la latitud, longitud, azimut, ángulo de vuelo, altura y velocidad inicial como variables de estado (Tewari, 2016 [1]) para la determinación de la matriz de transformación del sistema fijo al cuerpo, al sistema inercial. La validación del código se realiza mediante la verificación de trayectorias orbitales conocidas, y, además, se comparan las simulaciones del vehículo lanzador elegido como testigo.

## 3. DESARROLLO

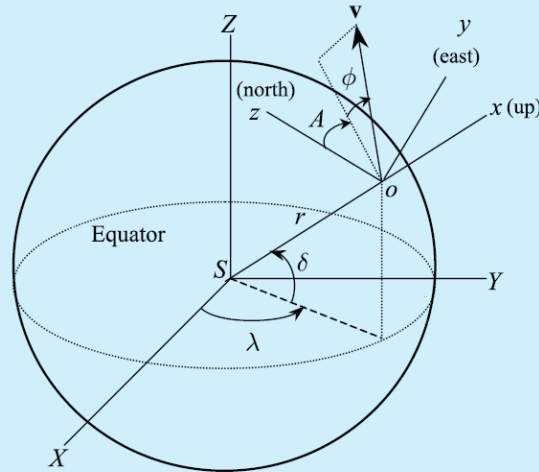
### 3.1. Ecuaciones de movimiento

El vuelo atmosférico está influenciado por las fuerzas creadas por el movimiento del vehículo en relación con la atmósfera y, por lo tanto, requieren de un sistema de referencia fijo a esta. Dado que la atmósfera de un planeta gira con él, empleamos un marco de referencia fijo para el planeta para expresar las ecuaciones del vuelo atmosférico. Este es el marco giratorio centrado en el planeta (SXYZ) con ejes representados por los vectores unitarios **I**, **J**, **K**, respectivamente.

Para determinar el conjunto completo de ecuaciones que gobiernan la traslación dentro de la atmósfera son necesarias el conjunto de 3 ecuaciones cinemáticas y 3 ecuaciones dinámicas. Una vez que el vector de velocidad relativa ( $v, \varphi, A$ ) se determina a partir de la solución de las ecuaciones dinámicas, el vector de posición ( $r, \delta, \lambda$ ) se calcula a partir de las ecuaciones cinemáticas, completando así la solución de la trayectoria.

Las ecuaciones cinemáticas se obtienen de la expresión de la velocidad y una transformación de coordenadas entre un sistema de referencia centrado en el planeta (SXYZ) y el horizonte local (oxyz), que tiene ejes ox (**i**), oy (**j**) y oz (**k**), a lo largo de la vertical local (hacia arriba), el Este local y el Norte local, respectivamente, como muestra la figura 1.

Figura 1. Marcos de referencia sistema fijo en el planeta y horizonte local [1]



Por lo tanto, ambos sistemas de referencia quedan relacionados por:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \lambda & \cos \delta \sin \lambda & \sin \lambda \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin \delta \cos \lambda & -\sin \delta \sin \lambda & \cos \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{J} \\ \mathbf{K} \end{pmatrix} \quad (1)$$

La velocidad relativa se puede expresar en la terna horizonte local de la siguiente manera:

$$\mathbf{v} = v (\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \sin A \mathbf{j} + \cos \phi \cos A \mathbf{k}) \quad (2)$$

A su vez, la velocidad relativa es:

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{i} + \boldsymbol{\Omega} \times (r\mathbf{i}) \quad (3)$$

donde

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_x \mathbf{i} + \Omega_y \mathbf{j} + \Omega_z \mathbf{k} \quad (4)$$

es la velocidad de la terna de referencia horizonte local (oxyz) relativa a la terna centrada en el planeta (SXYZ). Reemplazando la ecuación 4 en la ecuación 3:

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{i} + r\Omega_z \mathbf{j} + r\Omega_y \mathbf{k} \quad (5)$$

Una comparación de las ecuaciones 5 y 2 dan como resultado las siguientes relaciones cinemáticas:

$$\dot{r} = v \sin \phi \tag{6}$$

$$\Omega_y = -\frac{v}{r} \cos \phi \cos A \tag{7}$$

$$\Omega_z = \frac{v}{r} \cos \phi \sin A \tag{8}$$

A partir de la transformación de coordenadas entre los sistemas de referencia centrado en la planeta y el horizonte local:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\lambda} \mathbf{k} - \dot{\delta} \mathbf{j} = \dot{\lambda} \sin \delta \mathbf{i} - \dot{\delta} \mathbf{j} + \dot{\lambda} \cos \delta \mathbf{k} \tag{9}$$

que, al comparar con las Ecs. (7) y (8), obtenemos:

$$\dot{\delta} = \frac{v}{r} \cos \phi \cos A \tag{10}$$

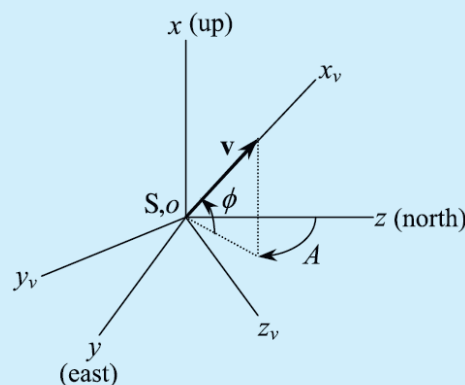
$$\dot{\lambda} = \frac{v \cos \phi \sin A}{r \cos \delta} \tag{11}$$

Las ecuaciones cinemáticas de movimiento relativas a un planeta en rotación, Ecs. (6), (10), y (11) son las mismas que se emplean en la mecánica orbital.

Las ecuaciones dinámicas del movimiento se derivan expresando la aceleración inercial y los vectores de fuerza en un marco de ejes de viento ( $S_x, y_v, z_v$ ), con ejes en direcciones opuestas y normales a la velocidad relativa del viento.

La orientación de los ejes del viento ( $S_x, y_v, z_v$ ), en relación con el marco del horizonte local ( $oxyz$ ), se representa en la Fig. 2.

Figura 2. Orientación de los ejes del viento relativos al horizonte local [1]



Por lo tanto, los dos marcos están relacionados por:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{i}_v \\ \mathbf{j}_v \\ \mathbf{k}_v \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \phi & \cos \phi \sin A & \cos \phi \cos A \\ 0 & \cos A & -\sin A \\ -\cos \phi & \sin \phi \sin A & \sin \phi \cos A \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{Bmatrix} \tag{12}$$

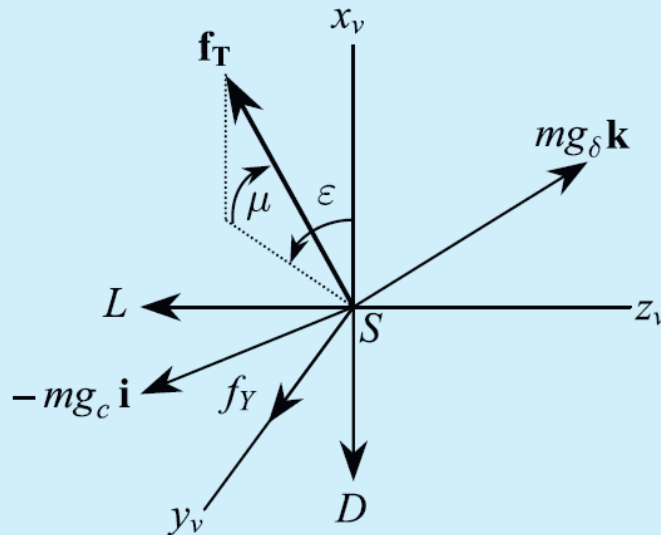
Las ecuaciones dinámicas del movimiento de traslación en forma vectorial se obtienen a partir de la segunda ley de Newton expresada como:

$$\mathbf{f} = m\mathbf{a}_I = m \frac{d\mathbf{v}_I}{dt} \quad (13)$$

donde  $\mathbf{f}$  denota la fuerza externa neta y  $m$  representa la masa total del vehículo. Dado que  $\mathbf{f}$  consiste en el vector de fuerza aerodinámica  $(-D\mathbf{i}_v + f_Y \mathbf{j}_v - L\mathbf{k}_v)$ , empuje  $f_T$  y fuerza de gravedad  $(-mg_c \mathbf{i} + mg_\delta \mathbf{k})$ , resueltos en los ejes del viento (como se muestra en la Fig. 3), tenemos:

$$\mathbf{f} = (f_T \cos \epsilon \cos \mu - D - mg_c \sin \phi + mg_\delta \cos \phi \cos A)\mathbf{i}_v + (f_T \sin \mu + f_Y - mg_\delta \sin A)\mathbf{j}_v + (-f_T \sin \epsilon \cos \mu - L + mg_c \cos \phi + mg_\delta \sin \phi \cos A)\mathbf{k}_v \quad (14)$$

Figura 3. Fuerzas externas en los ejes del viento [1]



Ahora, dado que el vector de fuerza se resuelve convenientemente a lo largo de los ejes del viento, debemos transformar la aceleración inercial del centro de masa del vehículo, a la expresada en el horizonte local (oxyz), en el marco de los ejes del viento ( $Sx_v, y_v, z_v$ ), para escribir las ecuaciones dinámicas de movimiento [1]:

$$m \dot{v} = f_T \cos \epsilon \cos \mu - D - m g_c \sin \phi + m g_\delta \cos \phi \cos A \quad (15)$$

$$m v \cos \phi \dot{A} = m \frac{v^2}{r} \cos^2 \phi \sin A \tan \delta + \quad (16)$$

$$f_T \sin \mu + f_Y - m g_\delta \sin A + m \omega^2 r \sin A \sin \delta \cos \delta - 2m \omega v (\sin \phi \cos A \cos \delta - \cos \phi \sin \delta) m v \dot{\phi} \quad (17)$$

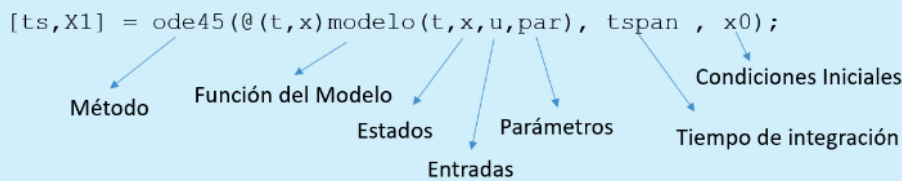
$$= m \frac{v^2}{r} \cos^2 \phi + f_T \sin \epsilon \cos \mu + L - mg_c \cos \phi - mg_\delta \sin \phi \cos A + m \omega^2 r \cos \delta (\sin \phi \cos A \sin \delta + \cos \phi \cos \delta) + 2m \omega v \sin A \cos \delta$$

Aquí, el lado izquierdo de la primera ecuación denota la aceleración a lo largo de la trayectoria de vuelo instantánea, mientras que la segunda y la tercera representan la aceleración centrípeta causada por la curvatura de la trayectoria de vuelo en las direcciones local horizontal y vertical local, respectivamente. Los términos de aceleración centrípeta y de Coriolis, debido a la rotación planetaria, aparecen en el lado derecho de estas ecuaciones de movimiento, junto con los respectivos componentes de la fuerza externa.

De esta forma, todas las trayectorias atmosféricas deben satisfacer las ecuaciones cinemáticas (6), (10) y (11) y las dinámicas (15), (16) y (17). Su vector solución,  $r(t)$ ,  $\lambda(t)$ ,  $\delta(t)$ ,  $v(t)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $A(t)$ , produce la posición y la velocidad como funciones del tiempo. Sin embargo, también se requieren modelos atmosféricos, de gravedad, aerodinámicos y de propulsión, los cuales son de naturaleza no lineal, lo que requiere un procedimiento de solución numérica iterativo como los métodos de Runge-Kutta.

Si bien es común emplear aceleración constante debido a la gravedad (aproximación de planeta plano) o, en el mejor de los casos, la ley de gravitación de Newton (modelo de planeta esférico), para el vuelo atmosférico tendremos en cuenta las variaciones de gravedad radial y latitudinal (modelo de planeta no esférico). Nuestro modelo atmosférico también será lo más general posible empleando un modelo de 21 capas. El modelo aerodinámico que utilizamos considera la variación de la fuerza aerodinámica con la posición (altitud) y la velocidad en función de coeficientes adimensionales. Finalmente, el modelo de propulsión debe tener en cuenta la variación del empuje con la altitud y la velocidad, y el consumo de combustible que, a su vez, determina la masa instantánea del vehículo. El conjunto adicional de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales resultantes de estos modelos se combina con las ecuaciones cinemáticas y dinámicas derivadas anteriormente. Estas se resuelven con el solver interno de Matlab® ode45, el cual se basa en una fórmula explícita de Runge-Kutta (4,5), el par Dormand-Prince [7], y posee la siguiente sintaxis:

Figura 4. Sintaxis ode45 [8]



Todos los módulos necesarios para el programa serán explicados en las siguientes secciones.

### 3.2. Modelización de la Tierra

La Tierra no es perfectamente esférica, sino que se asemeja más a un elipsoide de revolución, con un radio ecuatorial mayor que su radio polar. La consideración del planeta con un radio no esférico es muy importante para mejorar la precisión del programa de cálculo de trayectoria de un lanzador, ya que mejora la predicción del movimiento.

Para el cálculo de trayectoria, es imprescindible tener una referencia y, como el radio no es constante en toda la Tierra, se define un nivel de mar de referencia calculando un radio de superficie  $R$ , en función de la latitud planetaria céntrica local  $\delta$ , que es útil para tener en cuenta las variaciones atmosféricas con respecto a la altitud.

Utilizaremos el desarrollo de Britting (1971 [2]), el cual derivó la siguiente expansión para calcular el radio de la Tierra en función de la latitud:

$$R = R_e \left( 1 - \frac{\epsilon}{2} (1 - \cos 2\delta) + \frac{5\epsilon^2}{16} (1 - \cos 4\delta) \dots \right) \quad (18)$$

Donde

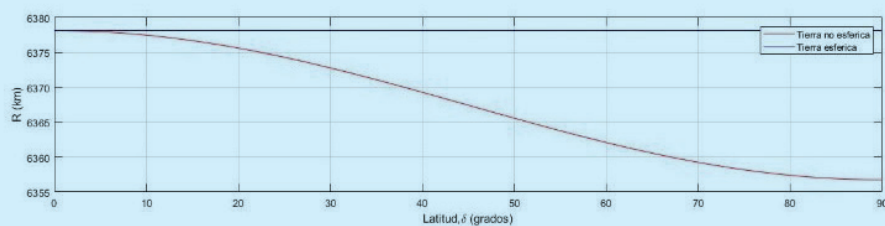
$$\epsilon = 1 - \frac{R_p}{R_e} \quad (19)$$

es la elipticidad del planeta, una relación entre el radio polar ( $R_p$ ) y el radio ecuatorial ( $R_e$ ). Generalmente, es un número pequeño, siendo  $\epsilon = 0$  un planeta perfectamente esférico. Para la Tierra,  $\epsilon = 1/298.257$ .

Lo interesante de este desarrollo es que en la mayoría de los casos es suficientemente preciso retener solo los dos primeros términos de la serie, lo que lleva a la siguiente aproximación:

$$R \approx R_e(1 - \epsilon \sin^2 \delta) \quad (20)$$

Figura 5. Radio de la Tierra para modelo esférico y no esférico



### 3.3. Modelización de la gravedad

Como se mencionó anteriormente, la Tierra se aparta, al igual que el resto de los cuerpos celestes, de la forma de simetría perfecta de un cuerpo esférico. Esto se debe a su rotación alrededor de un eje, que produce un desplazamiento de masa centrífuga generando un cuerpo axisimétrico que sobresale en el ecuador y se aplana en los polos. Adicionalmente, la forma axisimétrica de un planeta puede apartarse de una esfera de muchas otras formas. Para el cálculo, debido a la desviación de todos estos efectos, se utilizan los armónicos esféricos.

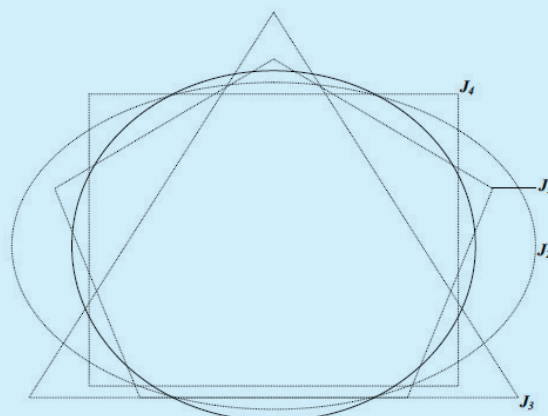
Para modelar los armónicos esféricos se utilizan las constantes de Jeffery, que son una serie de parámetros que se utilizan para describir la forma y la masa de un cuerpo celeste en el modelado de la gravedad, y permiten representar sus variaciones. Los principales valores se denominan  $J_2$ ,  $J_3$  y  $J_4$ .

La constante  $J_2$  describe la forma del cuerpo como un elipsoide, en lugar de una esfera perfecta, y se relaciona con el achatamiento del cuerpo.

La constante  $J_3$  se utiliza para describir la asimetría del cuerpo en relación con su plano ecuatorial.

La constante  $J_4$  se utiliza para describir la forma del cuerpo en términos de su curvatura.

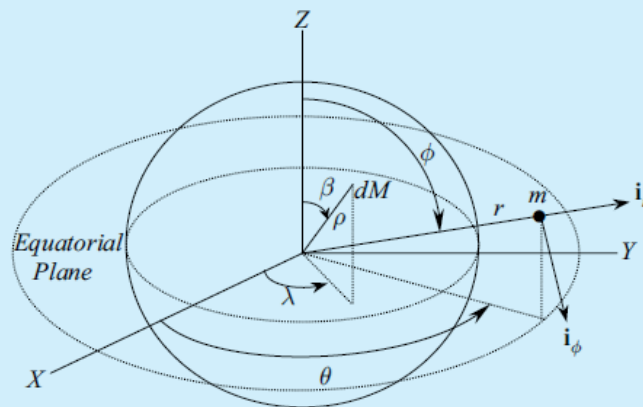
Figura 6. Armónicos esféricos de un planeta axisimétrico [1]



La ley de gravedad de Newton no es válida para una masa de prueba cercana a un planeta no esférico. Por lo tanto, adoptamos el enfoque de energía para derivar el modelo de gravedad no esférico. De esta forma, la aceleración de la gravedad se obtiene del gradiente del potencial gravitatorio con respecto al vector posición:

$$\mathbf{r} = r\mathbf{i}_r + r\phi\mathbf{i}_\phi \quad (21)$$

Figura 7. Vector posición de una masa de prueba [1]



El resultado final del cálculo de la gravedad en base a las hipótesis mencionadas es:

$$\mathbf{g} = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^T = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}\mathbf{i}_r - \frac{\partial\Phi}{r\partial\phi}\mathbf{i}_\phi \quad (22)$$

$$= g_r\mathbf{i}_r + g_\phi\mathbf{i}_\phi$$

$$g_r = \quad (23)$$

$$-\frac{GM}{r^2} \left( 1 - 3J_2 \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 P_2(\cos\phi) - 4J_3 \left(\frac{R_e}{r}\right)^3 P_3(\cos\phi) - 5J_4 \left(\frac{R_e}{r}\right)^4 P_4(\cos\phi) \right)$$

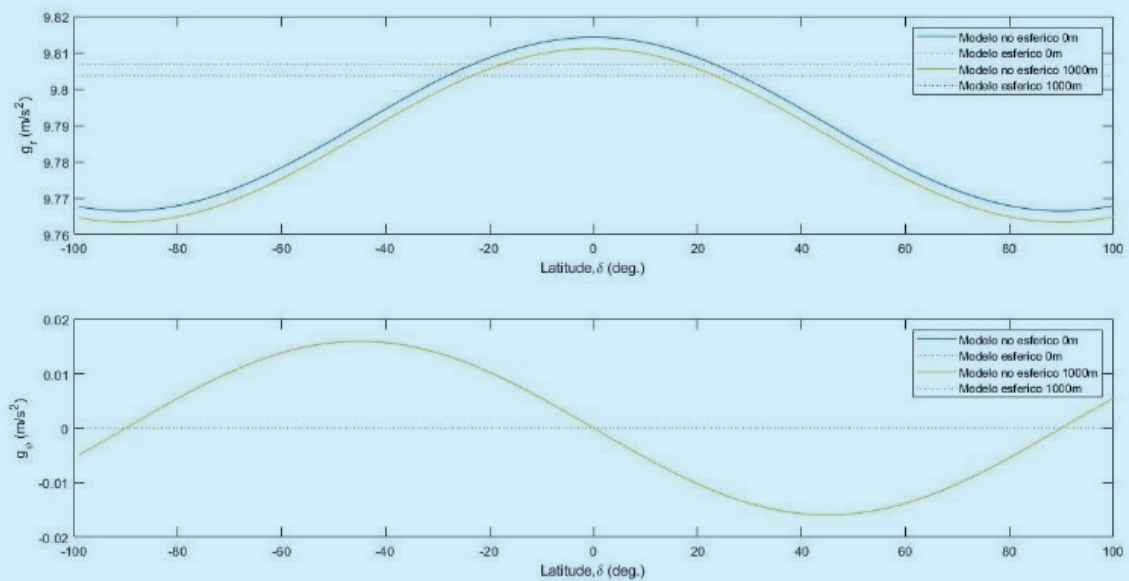
$$g_\phi = \quad (24)$$

$$-\frac{3GM}{r^2} \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 \sin\phi \cos\phi \left( J_2 + \frac{1}{2}J_3 \left(\frac{R_e}{r}\right) \sec\phi (5\cos^2\phi - 1) + \frac{5}{6}J_4 \left(\frac{R_e}{r}\right)^2 (7\cos^2\phi - 1) \right)$$

Donde se pueden considerar dos componentes de la gravedad: uno en la dirección radial  $g_r$  (desde el centro de la Tierra hasta el punto donde se mide la gravedad), y otra en dirección tangencial  $g_\phi$ , que actúa de forma perpendicular a la primera. Debido a un componente de gravedad transversal distinta de cero,  $g_\phi$ , la dirección de  $\mathbf{g}$  difiere de la dirección radial, mientras que su componente radial,  $g_r$ , es de menor magnitud en comparación con la predicha por un modelo de gravedad esférico, tal como se observa en la Fig. 8.



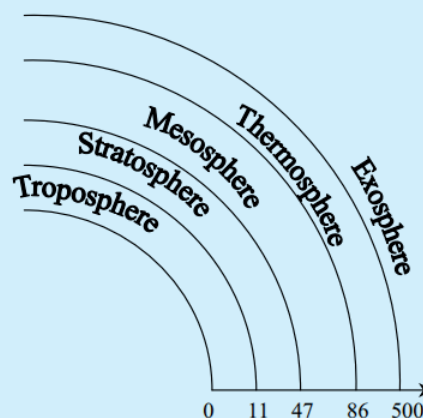
Figura 8. Comparación de las componentes radial y tangencial de la gravedad de un planeta esférico y uno no esférico, a 0m y 1000m de altura



### 3.4. Modelización de la atmósfera

Las cargas aerotérmicas en un vehículo de vuelo atmosférico dependen de las propiedades termodinámicas de los gases atmosféricos, por lo que un modelo cuidadosamente desarrollado es crucial para el análisis y diseño de vehículos aeroespaciales. Los modelos atmosféricos estándar se basan en el equilibrio hidrostático y térmico y constan de muchas capas, cada una con diferentes variaciones de temperatura con la altitud. La troposfera, que se extiende desde el nivel estándar del mar hasta  $h = 11$  km (tropopausa), ve una temperatura que disminuye linealmente con la altitud, mientras que la siguiente capa superior,  $11 < h \leq 47$  km, llamada estratosfera, consta de tres capas con temperatura constante (isotérmica) y linealmente creciente a diferentes velocidades, respectivamente. La operación de la mayoría de las aeronaves se limita a la troposfera y la estratosfera. Inmediatamente por encima de la estratosfera se encuentra la mesosfera, que se extiende hasta  $h = 86$  km y tiene una capa isotérmica, junto con dos capas consecutivas con temperatura linealmente decreciente. Una variación lineal de la temperatura con la altitud geopotencial es una aproximación estándar empleada en la mayoría de los modelos atmosféricos. Sin embargo, las capas atmosféricas superiores (termosfera y exosfera) no tienen equilibrio térmico y químico y, por lo tanto, tienen una variación inherentemente no lineal de temperatura con la altitud. Puede emplearse un modelo exponencial adecuado para ajustar la variación de la densidad con la altitud en un rango específico (y limitado) de altitudes.

Figura 9. Capas de la atmósfera [1]



Seguiremos la convención de la 1976 U.S. Standard Atmosphere [3] en el rango  $0 \leq h \leq 86$  km y, por encima de los 86 km de altitud, emplearemos la 1962 U.S. Standard Atmosphere [4], que modela convenientemente todas las capas con temperaturas que varían linealmente hasta  $h = 2000$  km. Los valores numéricos de la atmósfera estándar híbrida de 21 capas se tabulan en la Tabla 1.

Tabla 1. Atmósfera estándar derivada de las 1962 y 1976 U.S. Standard Atmosphere [1]

$i$	$h_i$ (km)	$T_i$ (K)	$R$ (J/kg.K)	$a$ (K/km)
1	0	288.15	287.0	-6.5
2	11.0191	216.65	287.0	0.0
3	20.0631	216.65	287.0	1.0
4	32.1619	228.65	287.0	2.8
5	47.3501	270.65	287.0	0.0
6	51.4125	270.65	287.0	-2.8
7	71.8020	214.65	287.02	-2.0
8	86	186.946	287.02	1.693
9	100	210.02	287.84	5.0
10	110	257.0	291.06	10.0
11	120	349.49	308.79	20.0
12	150	892.79	311.80	15.0
13	160	1022.2	313.69	10.0
14	170	1103.4	321.57	7.0
15	190	1205.4	336.68	5.0
16	230	1322.3	366.84	4.0
17	300	1432.1	416.88	3.3
18	400	1487.4	463.36	2.6
19	500	1506.1	493.63	1.7
20	600	1506.1	514.08	1.1
21	700	1507.6	514.08	0.0

### 3.5. Código computacional

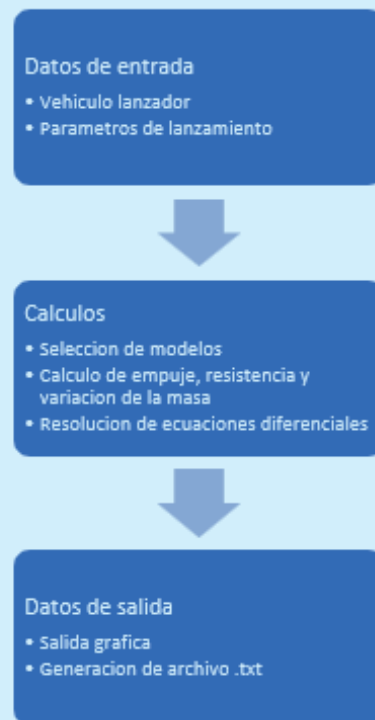
El programa de simulación de trayectorias fue desarrollado en Matlab utilizando un método de programación en módulos. Este tipo de programación permite dividir un programa complejo en programas más pequeños y manejables, lo que facilita su escritura, depuración y corrección. Las principales ventajas de este método radican en la simplicidad y organización del código principal, en la posibilidad de optar por utilizar los módulos que se deseen, facilitar el desarrollo colaborativo y la facilidad de mejorar el programa con el agregado de nuevos módulos.

El programa se inicia con un módulo de ingreso de datos con la información básica necesaria del lanzador a analizar, que incluye generalidades de la misión, propiedades geométricas del lanzador, características del combustible y lugar del lanzamiento.

Luego tenemos los módulos fundamentales para el correcto cálculo, que modelizan los distintos fenómenos físicos descriptos inicialmente y que se basan en las hipótesis realizadas. Estos módulos son:

- Modelización de la Tierra
- Modelización de la Gravedad
- Modelización de la Atmósfera
- Módulo de Cálculo (resolución de las ecuaciones de movimiento)
- Recopilación de datos de resultado
- Salida gráfica

Figura 10. Diagrama de flujo

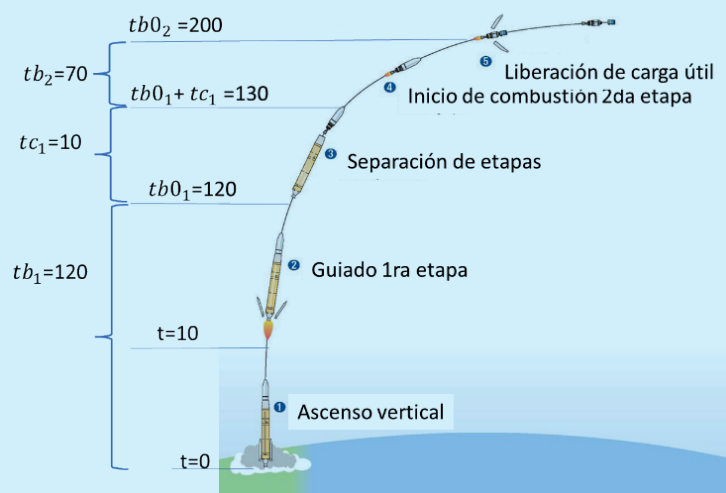


El programa divide las distintas etapas del vuelo en eventos. Cada evento representa un momento específico durante la trayectoria del lanzador, importante para el control y monitoreo del lanzamiento.

Estos eventos comprenden:

- Despegue
- Inicio del *gravity turn*
- Inicio de combustión de etapas
- Fin de combustión de etapas
- Desprendimiento de etapas
- Máxima altitud alcanzada

Figura 11. Esquema de eventos del vehículo lanzador genérico de 2 etapas, en función de los tiempos de quemado  $tb$  y de separación de etapas  $tc$



Luego de ejecutarse el Módulo de Cálculo, habiéndose resuelto las ecuaciones de movimiento, se grafica la variación de las variables a lo largo de toda la trayectoria.

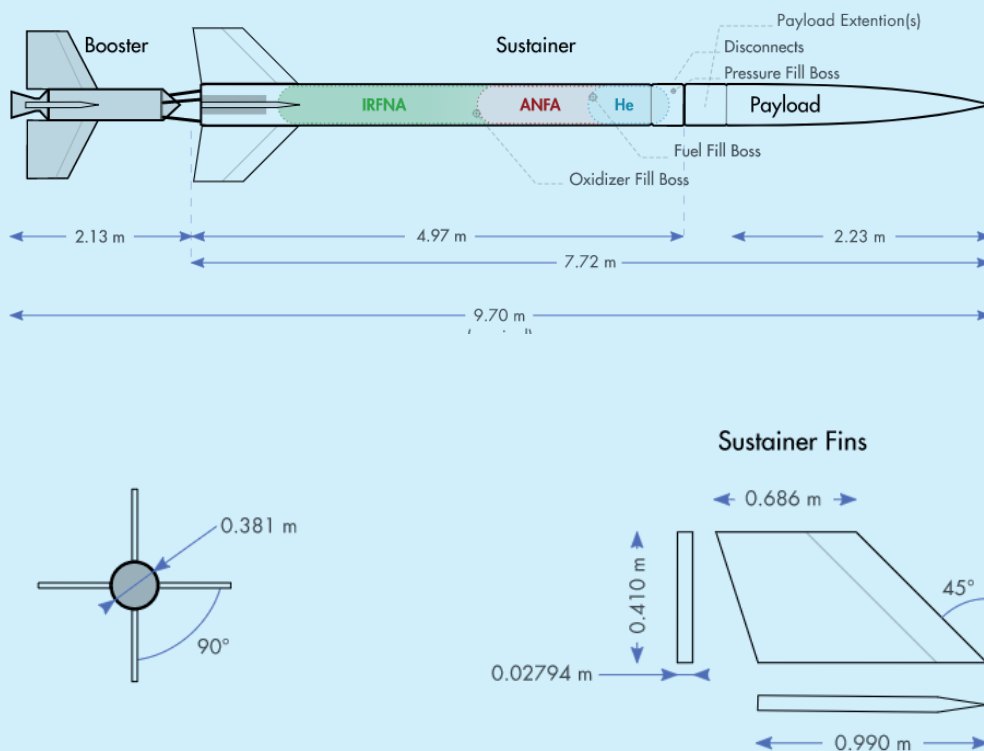
Las salidas gráficas se agrupan en tres conjuntos:

- Curvas características: se grafican las variables altitud, velocidad, aceleración ángulo de ataque y ángulo de azimut, en función del tiempo. Se grafica recorrido de latitud vs. longitud a lo largo de la trayectoria.
- Atmósfera: se visualizan la presión, temperatura, densidad y velocidad del sonido en función de la altura de la atmósfera modelada.
- Lanzador: se observan el empuje, masa, mach y resistencia en función del tiempo.

### 3.5. Resultados obtenidos

La validación del código se realiza mediante la verificación de trayectorias conocidas. El vehículo lanzador elegido como testigo es el Aerobee 150A (Russ y Randall, 1961 [5]).

Figura 12. Esquema del vehículo lanzador Aerobee 150A [9]



El Aerobee 150 A es un cohete suborbital de cuatro aletas de aproximadamente 10 m de alto y 0,38 m de diámetro. Es un vehículo de lanzamiento de torre estabilizado por aletas de vuelo libre, que utiliza un *booster* de propulsor sólido para la etapa 1 y un sustentador de propulsor líquido para la etapa 2.

La carga útil está montada en la estructura de la nariz. La secuencia de la misión comienza con el encendido del motor de la etapa 1 en  $t=0s$ . Después de  $t=0,3s$ , el motor de la etapa 2 se enciende y ambas etapas se queman juntas durante 2,2 s (hay que tener en cuenta que el motor de la etapa 1 tiene una nariz deflectora para desviar el escape de la etapa 2). En  $t = 2,5 s$ , el motor de la etapa 1 finaliza su combustión y cae, mientras que el motor de la etapa 2 continúa quemando combustible hasta  $t=51,8s$ .

Los datos de entrada en el programa se resumen en las tablas 2 y 3:

Tabla 2. Datos de entrada: vehículo lanzador

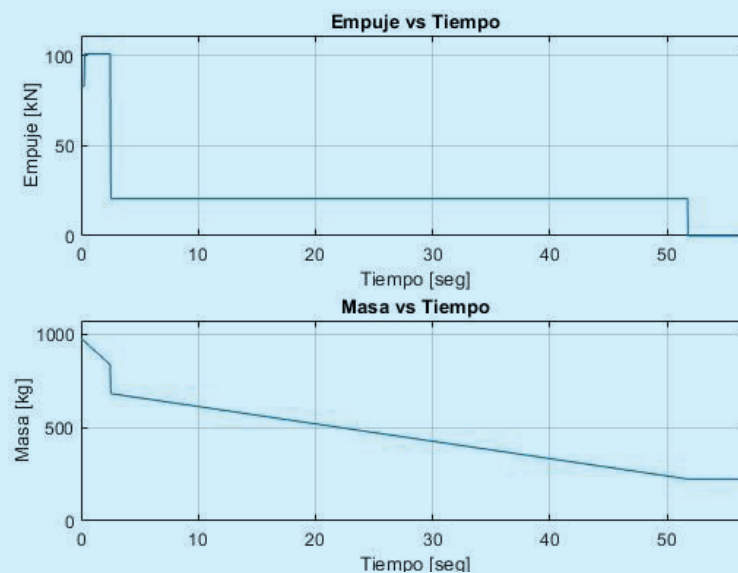
Datos de vehículo lanzador			
Sostenedor	Masa estructural	mS	132,9 kg
	Masa de combustible	mp	478,3 kg
	Masa de carga paga	mL	90,7 kg
	Impulso específico	lsp	198 s
	Tiempo de inicio de combustión	ti	0,3 s
	Tiempo de quemado	tb	51,5 s
	Tiempo de desprendimiento	tc	0 s
	Área de referencia	areaS	0,1141 m <sup>2</sup>
Booster	Masa estructural	mS	153,3 kg
	Masa de combustible	mp	118,8 kg
	Impulso específico	lsp	178 s
	Tiempo de inicio de combustión	ti	0 s
	Tiempo de quemado	tb	2,5 s
	Tiempo de desprendimiento	tc	0 s
	Área de referencia	areaB	0,1141 m <sup>2</sup>

Tabla 3. Datos de entrada: condiciones de lanzamiento

Condiciones de lanzamiento		
Altura	alt	5 m
Longitud	lon	-75.439339 °
Latitud	lat	37.883255 °
Velocidad inicial	vi	0 m/s
Ángulo de lanzamiento	fpa	88 °
Azimut	Azi	180 °

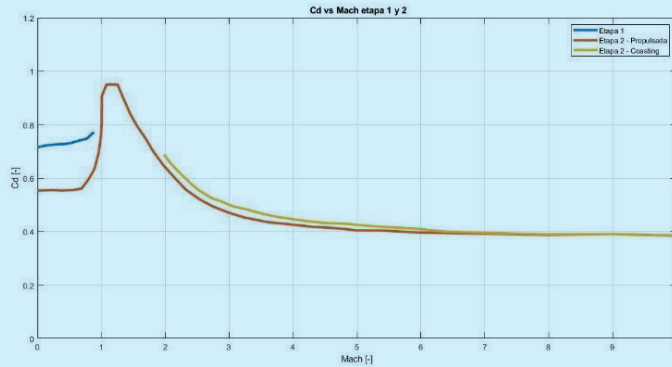
De esta forma, el simulador calcula el empuje y la masa actual en función del tiempo:

Figura 13. Empuje y masa en función del tiempo



En cuanto al coeficiente de resistencia, es ingresado como uno de los datos de entrada en esta primera versión del programa (posteriormente se planea la adición de un módulo para el cálculo de la resistencia):

Figura 14. Coeficiente de resistencia en función del número de Mach



Adicionalmente se tomarán las siguientes consideraciones para esta primera etapa de cálculo:

- El vector de fuerza aerodinámica se compone únicamente por las resistencias, es decir, no hay cargas laterales ( $f_y, j_y=0$ ) ni sustentación ( $Lk_v=0$ ).
- El vector de empuje coincide con la dirección del eje longitudinal del vehículo.

De esta forma, el vector solución  $r(t), \lambda(t), \delta(t), v(t), \varphi(t), A(t)$  puede ser representado en las figuras 15, 16 y 17, con la salvedad de que se resta al vector posición  $r(t)$  el radio de la Tierra en función de la latitud  $R(\delta)$ , para expresar los resultados en altura. También se decidió graficar la aceleración (Ec. 15).

Figura 15. Latitud y longitud

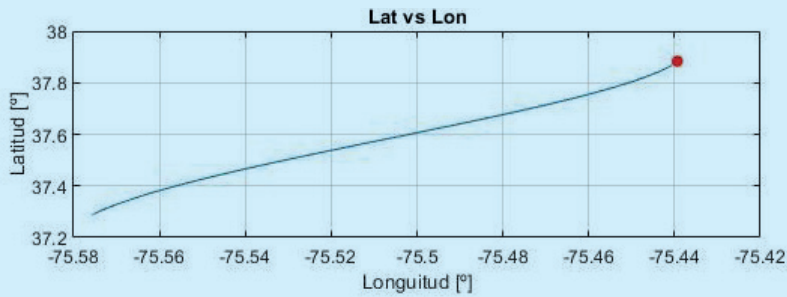
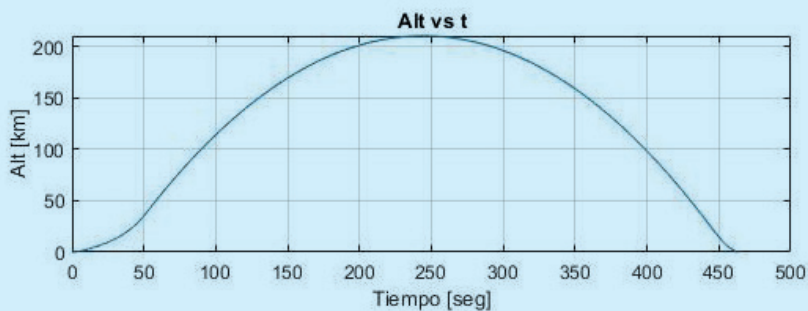


Figura 16. Altura, velocidad y aceleración en función del tiempo



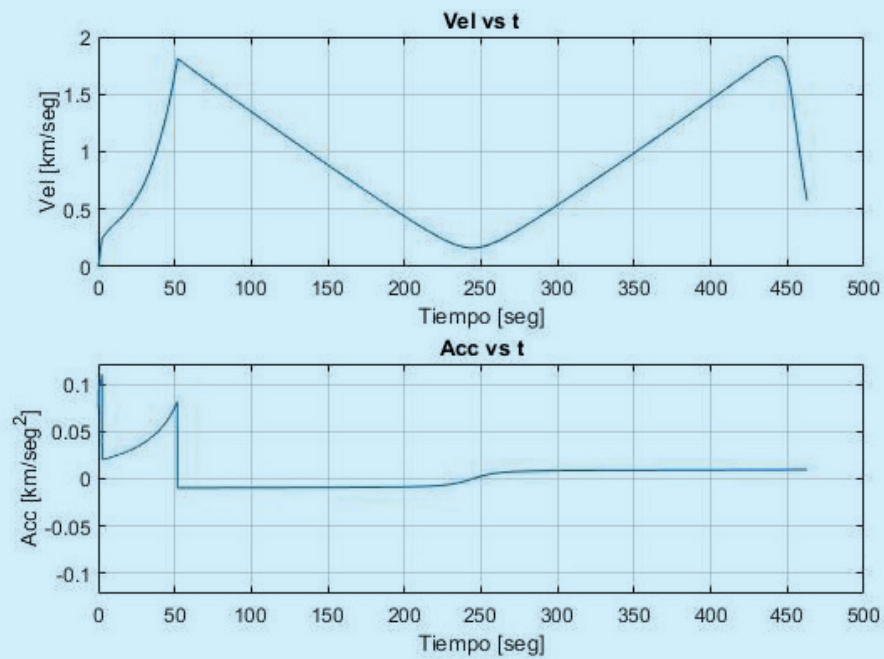
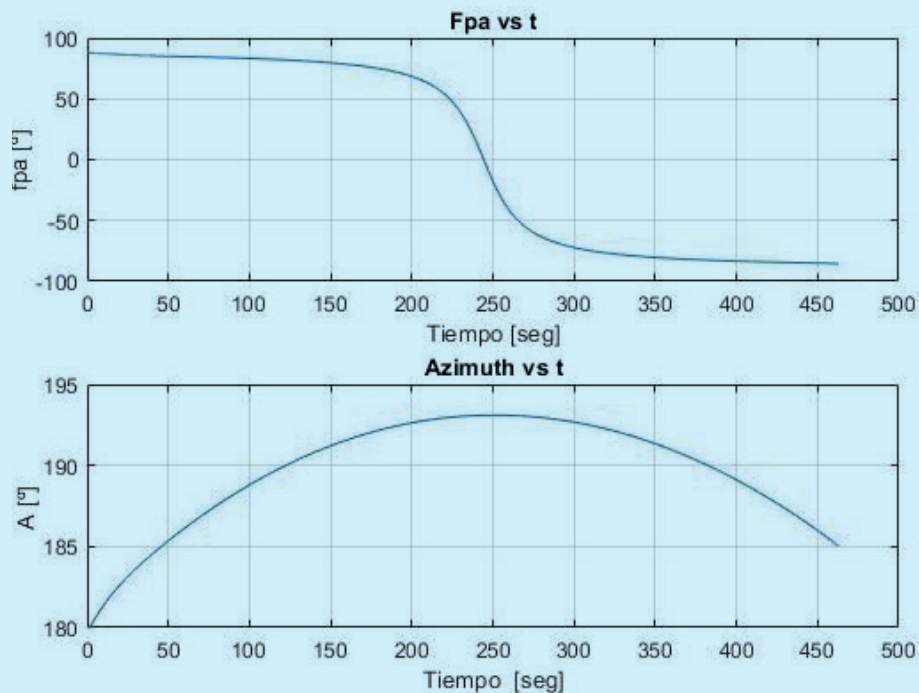
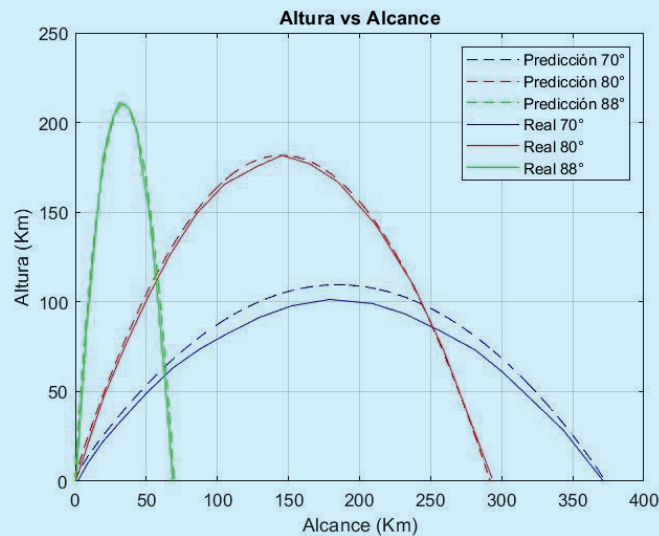


Figura 17. Ángulo de trayectoria y azimut en función del tiempo



A su vez, con fines comparativos se grafican las curvas reales de altura-alcance para tres configuraciones de lanzamiento distintas, junto con las obtenidas por el programa (Fig. 18). Se puede observar que cuanto mayor sea el ángulo de lanzamiento (más vertical), el error existente entre la curva real y la simulada disminuye.

Figura 18. Altura-alcance para ángulos de lanzamiento de 88°, 80° y 70°.



## CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos permiten concluir que a medida que el ángulo de lanzamiento se incrementa, el error entre la simulación y los valores reales disminuyen. Por este motivo, el programa de 3 grados de libertad se da por satisfactorio y sienta las bases para el desarrollo de un futuro simulador de 6 grados de libertad, que será utilizado dentro del proyecto marco del Grupo de Tecnología Aeroespacial (GTA), "Diseño y optimización de un Lanzador Orbital Universitario para satélites tipo Cubsat". Se usará, como datos de entrada, un cohete sonda modificado para inyección de microsátélites en órbita baja (LEO). Esta es una modificación preliminar del módulo de servicio de un cohete sonda de dos etapas con propulsante sólido, del tipo de los utilizados ampliamente en Argentina durante los años de la exploración de la alta atmósfera y los experimentos de microgravedad, que lo convierte en una tercera etapa propulsada que permita el lanzamiento y posterior inserción en órbita terrestre baja (LEO) de satélites tipo Cubesat como una alternativa de bajo costo operativo para sumar al programa de un lanzador nacional. Está diseñado para volar en un modo no guiado, estabilizado por rotación. Las características principales de la tercera etapa son el resultado de una revisión simplificada de lanzadores comerciales existentes, haciendo foco en los datos del vehículo SS-520 modificado por ISAS/JAXA, Agencia Espacial Japonesa, quién lanzó el SS-520-5 con éxito y puso en órbita un CubeSat 3U TRICOM-1R en febrero de 2018.

Este logro convierte al SS-520-5 en el primer cohete en alcanzar la certificación del récord Guinness como el "Cohete Orbital más pequeño" y es el mejor punto de partida para el análisis de las mejoras de los cohetes sonda para convertirlos en pequeños lanzadores de satélites.

## REFERENCIAS

- [1] A. Tewari (2006), Atmospheric and space flight dynamics: Modeling and simulation with MATLAB and Simulink. Estados Unidos: Birkhauser Boston.
- [2] Britting, K.R. (1971), Inertial Navigation Systems Analysis. Wiley Interscience: Somerset, NJ.
- [3] Committee on Extension to the Standard Atmosphere (COESA) (1976), U.S. Standard Atmosphere 1976. Washington, DC: Government Printing Office.
- [4] COESA (1962), U.S. Standard Atmosphere 1962. Washington, DC: Government Printing Office.
- [5] K. M. Russ y F. W. Randall (1961), Performance summary for the Aerobee 150A Sound Rocket Vehicle, report no. AST/EIR-13319, Vought Astronautics.
- [6] Mircea-Vlad Radulescu (2016), Three Degree of Freedom Sounding Rocket Model with Pitch Control Study. [https://www.academia.edu/26204338/Three\\_Degree\\_of\\_Freedom\\_Sounding\\_Rocket\\_Model\\_with\\_Pitch\\_Control\\_Study](https://www.academia.edu/26204338/Three_Degree_of_Freedom_Sounding_Rocket_Model_with_Pitch_Control_Study)
- [7] The MathWorks Inc, Mathworks.com. <https://la.mathworks.com/>
- [8] S.A. Castaño Giraldo, Ecuaciones Diferenciales EDO, Control Automático Educación. <https://controlautomaticoeducacion.com/matlab/ecuaciones-diferenciales-edo/>
- [9] Nathan Bergey, Aerobee 150 A, Open Aerospace. <https://open-aerospace.github.io/Aerobee-150/>